Método Matemático para las Series Uniformes o Anualidades

En el presente documento utilizaremos tres métodos para hallar las fórmulas que se utilizan para efectuar cálculos financieros en las anualidades vencidas. Primero se hallará la fórmula del valor futuro de una anualidad uniforme vencida utilizando el método de las progresiones, segundo, utilizaremos el método de la ecuación en diferencia finita[1], y finalmente, el método de las iteraciones que permitirá comprender con mayor detalle el segundo método[2]. Cabe destacar que el objetivo de este documento es utilizar el método matemático para hallar el Factor que Capitaliza la Serie (FC.S.), dado que el resto de factores como el Factor que Actualiza la Serie (F.A.S.), el Factor de Recuperación del Capital (F.R.C.), y el Factor de Depósito al Fondo de Amortización (F.D.F.A.) han sido deducidos del F.C.S y figuran en el documento "Las series uniformes", disponible en la web del autor.

1) El método de las progresiones

Sea "F" el valor futuro de una anualidad o serie uniforme de un total de "6" rentas de valor nominal "R", las mismas que son capitalizadas con una tasa de interés efectiva vencida de valor "i", este valor futuro "F" puede ser expresado en la siguiente ecuación:

$$F_6 = R.(1+i)^5 + R.(1+i)^4 + R.(1+i)^3 + R.(1+i)^2 + R.(1+i)^1 + R \qquad (1)$$

Considerando el concepto de una progresión geométrica creciente con una razón de crecimiento "r", y un primer término "a", tenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} Suma &= a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6 \\ Suma &= a1 + a1.r + a1.r^2 + a1.r^3 + a1.r^4 + a1.r^5 \end{aligned} \qquad (2)$$

[1] El primer método ha sido tomado del texto de Carlos Aliaga, Manual de Matemática Financiera, Apuntes de Estudio, Universidad Del Pacífico; y el segundo método, del texto de Jaime García, Matemáticas Financieras con ecuaciones de diferencia finita, cuarta edición, Pearson, Santa Fe de Bogotá, 2,000

[2] Método utilizado en García (2000)

La suma de la progresión se obtiene con la siguiente ecuación:

$$Suma = \frac{a1.r^n - a1}{r-1} \qquad (3)$$

Aplicando la ecuación (3) a la ecuación (1), tenemos:

$$Suma = F_6 = \frac{R.(1+i)^6 - R}{1+i-1} \qquad (4)$$

Donde la razón en este caso es el factor de capitalización y el primer término es el valor de la renta nominal "R".

Simplificando la ecuación (4):

$$F_6 = R\frac{(1+i)^6 - 1}{i} \qquad (5)$$

Donde el factor que multiplica la renta "R", se le denomina el "Factor que Capitaliza una Serie" (F.C.S.)

La ecuación (5) puede ser escrita de la siguiente forma literal:

$$F_6 = R.FCS_i^6 \qquad (6)$$

Generalizando el análisis anterior, tenemos que la ecuación (1) puede estar en función de "n" rentas "R"

$$F_n = R.(1+i)^{n-1} + R.(1+i)^{n-2} + R.(1+i)^{n-3} + ... + R.(1+i)^{n-(n-2)} + R^{n-(n-1)} \quad (7)$$

Reacomodando la ecuación (7):

$$F_n = R + R.(1+i)^1 + R.(1+i)^2 + R.(1+i)^3 + ... + R.(1+i)^{n-2} + R^{n-1} \qquad (8)$$

Aplicando la ecuación (3) a la ecuación (8) tenemos:

$$\boxed{F_n = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}} \qquad (9)$$

y en términos literales:

$$\boxed{F_n = R.FCS_i^n} \qquad (10)$$

2) El método de las ecuaciones en diferencia finita

Sea una serie uniforme vencida de "n "rentas mensuales "R", con una tasa de interés efectiva mensual "i", el valor futuro se explica con la siguiente ecuación

$$F_{t+1} = F_t + i.F_t + R \qquad (11)$$

Donde el miembro de la izquierda es el valor futuro total acumulado al final del periodo "t+1", el primer término del miembro de la derecha es el valor total acumulado al final del periodo "t", el segundo término es el interés devengado por el valor acumulado en el periodo "t", y el último término es el valor de la renta pagado al final del periodo "t+1".
Reacomodando la ecuación (11):

$$F_{t+1} = (1+i)F_t + R \qquad (12)$$

es una ecuación en diferencia de primer orden.

Siguiendo el método del texto de Alpha Chang[3], tenemos la siguiente ecuación en diferencia de primer orden:

$$y_{t+1} + a.y_t = c \qquad (13)$$

La solución de esta ecuación, siguiendo el método señalado, se da con la siguiente ecuación:

$$y_t = \left[y_o - \frac{c}{1+a} \right].[-a]^t + \frac{c}{1+a} \qquad (14)$$

Si aplicamos la ecuación (14) a la ecuación (12), tenemos:

$$F_t = \left[F_o - \frac{R}{1-(1+i)} \right].[1+i]^t + \frac{R}{1-(1+i)} \qquad (15)$$

[3] Métodos Fundamentales de Economía Matemática, 3era. edición, Mc Graw Hill

donde:

$$c = R$$
$$a = -(1+i)$$

Asumiendo $F_{t=o}$ = 0 en la ecuación (15), tenemos que:

$$F_t = \left[0 + \frac{R}{i}\right].[1+i]^t - \frac{R}{i}$$
$$F_t = \left[\frac{R}{i}\right](1+i)^t - \frac{R}{i} \qquad (16)$$
$$F_t = \frac{R}{i}\left[(1+i)^t - 1\right]$$

Reacomodando (17) y asumiendo que “t” es igual que “n”

$$F_n = R.\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) \qquad (17)$$

La ecuación (17) es igual que la ecuación (9), ambas nos explican que el producto de la renta R con el factor que capitaliza la serie nos da el valor futuro de la serie capitalizada al periodo “n”.

3) <u>Método de las iteraciones</u>

Sea una serie uniforme de seis rentas “R” mensuales, una tasa de interés efectiva mensual “i”, y se desea estimar el valor futuro acumulado al final del periodo seis, luego:

$$\begin{aligned}
F_1 &= R \\
F_2 &= F_1 + i.F_1 + R \\
F_3 &= F_2 + i.F_2 + R = F_2(1+i) + R \\
F_4 &= F_3 + i.F_3 + R = F_3(1+i) + R \qquad (18) \\
F_5 &= F_4 + i.F_4 + R = F_4(1+i) + R \\
F_6 &= F_5 + i.F_5 + R = F_5(1+i) + R
\end{aligned}$$

En términos generales, la última ecuación del sistema (19) puede ser planteada de la siguiente forma:

$$F_{t+1} = F_t + i.F_t + R$$
$$F_{t+1} = F_t(1+i) + R \qquad (19)$$

Efectuando iteraciones:

1) Cuando “t” tiene un valor de “0”

$$F_1 = F_0 + i.F_0 + R$$
$$F_0 = 0 \qquad (20)$$
$$F_1 = R$$

2) Cuando “t” tiene un valor de “1”

$$F_2 = F_1 + i.F_1 + R = F_1(1+i) + R \qquad (21)$$
$$F_2 = R.(1+i) + R$$

3) Cuando “t” tiene un valor de “2”

$$F_3 = F_2(1+i) + R$$
$$F_3 = (R.(1+i) + R)(1+i) + R \qquad (22)$$
$$F_3 = R.(1+i)^2 + R(1+i) + R$$

4) Cuando “t” tiene un valor de “3”

$$F_4 = F_3(1+i) + R$$
$$F_4 = (R.(1+i)^2 + R(1+i) + R)(1+i) + R \qquad (23)$$
$$F_4 = R.(1+i)^3 + R(1+i)^2 + R(1+i) + R$$

Generalizando:

$$F_t = R\left[(1+i)^{t-1} + (1+i)^{t-2} + ...(1+i)^2 + (1+i)^1 + (1+i)^0\right] \qquad (24)$$

Simplificando (25)

$$F_t = R\left[(1+i)^0 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{t-2} + (1+i)^{t-1}\right] \qquad (24.1)$$

Aplicando la ecuación (3) a la ecuación (25.1), obtenemos:

$$F_n = R.\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R.\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \qquad (25)$$

Finalmente, las ecuaciones (9), (17) y (25) son idénticas.