EL MÉTODO MATEMÁTICO PARA LAS SERIES VARIABLES CON GRADIENTE GEOMÉTRICO DECRECIENTE

El presente documento desarrolla en detalle el método de ecuaciones en diferencia finita"[1], y su aplicación a un determinado caso de la matemática financiera, El método consiste en utilizar ecuaciones en diferencia finita de primer orden, en un caso, polinomial, y en otro caso, con función exponencial. En ambos casos, a diferencia del utilizado en las series uniformes, estas ecuaciones contienen variables que aumentan de manera lineal o geométrica. El primer caso se refiere a las series variables con gradiente aritmético y el segundo caso, a las series variables con gradiente geométrico, y el gradiente puede ser creciente o decreciente. En adición se utiliza el método de los coeficientes indeterminados.
El presente documento desarrolla las "series variables con gradiente geométrico *decreciente*", y halla la fórmula que capitaliza la serie antes mencionada. El resto de fórmulas y factores son desarrolladas en el documento "las series variables" disponible en la web del autor del presente documento.

Las Series Variables con Gradiente Geométrico Decreciente

Sea una serie variable vencida de "n" periodos con gradiente geométrico decreciente:

$$g = 1 - k$$

donde "k" es la tasa de decrecimiento o de crecimiento negativo, de las rentas, periodo a periodo[2].
La primera renta es de valor "A" y una tasa de interés "i" por periodo. El objetivo es estimar el valor futuro "F" de esta serie variable con gradiente no lineal y decreciente.
La primera renta "A" será al final del primero periodo, la segunda renta será "$A.(1-k)$", al final del segundo periodo, la tercera renta será "$A.(1-k)^2$", al final del tercer periodo. Se puede apreciar que el crecimiento geométrico de las

[1] Jaime García, Matemáticas Financieras con ecuaciones de diferencia finita, cuarta edición, Pearson, Santa Fe de Bogotá, D.C., Colombia, 2000.
[2] "k" es una tasa porcentual de decrecimiento, sin embargo al utilizarse en la ecuación del gradiente, se utiliza el coeficiente respectivo, es decir, el valor de "k" dividido entre 100. Para efectos de simplificación, a "k" lo denominamos la tasa de decrecimiento o tasa de crecimiento negativa.

rentas se inicia en el segundo periodo, es decir, la renta crece exponencialmente.
La ecuación que representa el valor futuro de las rentas capitalizadas al periodo “n” será la siguiente:

$$F_{t+1} = F_t + i.F_t + A.(1-k)^t \qquad (1)$$

Con la finalidad de facilitar la explicación, asumimos que se efectúan “n” depósitos en un banco comercial, de tal manera que después de cierta cantidad de depósitos se tendrá un valor acumulado.
En la ecuación (1), el miembro de la izquierda es el valor acumulado en el periodo “t+1”, el primer término del miembro de la derecha es el valor acumulado en el periodo t, el segundo término es el interés devengado en el periodo t, el tercer término es el componente variable de cada uno de los depósitos que se efectúan, es decir, es el producto de dos factores, el primero es la renta base y el segundo factor es el valor del gradiente geométrico “g” que se caracteriza por tener una tasa de crecimiento negativa. Por ejemplo, en el periodo “1”, el valor de “t” es de cero tal como se dijese anteriormente, ya que en este periodo no existe gradiente aún; en el segundo periodo, el valor de “t” es de “1”, y así sucesivamente.
Ordenando la ecuación (1) tenemos:

$$F_{t+1} - (1+i)F_t = A.(1-k)^t \qquad (2)$$

Donde:

$$A.(1-k)^t = g(t) \qquad (3)$$

La ecuación (2) es una ecuación de diferencia finita con una función exponencial con variable tiempo “t”

El método

El método de solución de una ecuación en diferencia finita de primer orden[3], es el siguiente:

a) Caso 1: la tasa de interés es diferente que la tasa de crecimiento de las rentas

Sea la ecuación de diferencia finita de primer orden:

$$a1.Y_{t+1} + ao.Y_t = g(t) \qquad (4)$$

La solución general será la siguiente:

$$Y_t = Y_h(t) + Y_p(t) \qquad (5)$$

El primer término del miembro de la izquierda es la solución general de la ecuación homogénea de la ecuación (4), y el segundo término, es la solución particular de la ecuación mencionada.

La solución general de la ecuación homogénea

Sea la ecuación homogénea:

$$a1.Y_{t+1} + ao.Y_t = 0 \qquad (6)$$

Donde:

$$g(t) = 0$$

Aplicando la solución de una ecuación de diferencia cuando el término g(t) es una constante o tiene un valor de “0”, tenemos que:

$$Y_t = A^t.C + B.\left[\frac{1-A^t}{1-A}\right] \qquad (7)$$

Donde:

[3] García (2000), ver cita Nº 1; también en la web del autor del presente documento existe un documento del método utilizado y su respectiva explicación con mayor detalle.

$$A = \frac{-ao}{a1}$$
$$B = \frac{k}{a1} \qquad (8)$$

y "C" es una constante arbitraria

Según la ecuación homogénea (6), el término "k" es igual que cero, luego:

$$B = \frac{k}{a1} = \frac{0}{a1} = 0 \qquad (9)$$

Volviendo a la ecuación (2), su respectiva ecuación homogénea es la siguiente:

$$F_{t+1} - (1+i)F_t = 0 \qquad (10)$$

Aplicando las ecuaciones (8) y (9), tenemos que:

$$A = \frac{-ao}{a1} = \frac{-(-(1+i))}{1} = 1+i$$
$$B = \frac{k}{a1} = 0 \qquad (11)$$

y reemplazando (11) en (7) tenemos:

$$F_h(t) = (1+i)^t.C + (0).\left[\frac{1-(1+i)^t}{1-(1+i)}\right] \qquad (12)^4$$

Luego, la solución general de la ecuación homogénea será:

$$F_h(t) = (1+i)^t.C \qquad (13)$$

[4] La letra "h" que está como sub índice se refiere a homogénea

La solución particular

En cuanto a la solución particular, tenemos que:

$$A.(1-k)^t = g(t) \qquad (3)$$

La ecuación (3) es una función exponencial, por tanto, su solución también debe ser una función del mismo tipo:

$$F_p(t) = K.(1-k)^t \qquad (14)$$[5]

Convirtiendo la ecuación (14) al periodo "t+1"

$$F_p(t+1) = K.(1-k)^{t+1} \qquad (15)$$

Reemplazando (14) y (15) en la ecuación (2), tenemos:

$$K.(1-k)^{t+1} - (1+i).K.(1-k)^t = A.(1-k)^t \qquad (16)$$

Efectuando arreglos algebraicos:

$$\begin{aligned} &K.(1-k)^t.(1-k) - (1+i).K.(1-k)^t = A.(1-k)^t \\ &K.(1-k)^t\left[1-k-(1+i)\right] = A.(1-k)^t \qquad (17) \\ &K.(-k-i).(1-k)^t = A.(1-k)^t \end{aligned}$$

Igualando coeficientes para el caso de "A"

$$K.(-k-i) = A \qquad (18)$$

despejando "K"

$$K = \frac{-A}{k+i} \qquad (19)$$

Reemplazando "K" en la ecuación (14):

[5] La letra "p" que está como sub índice se refiere a particular

$$F_p(t) = \frac{-A}{k+i}.(1-k)^t \qquad (20)$$

Sumando ambas soluciones, ecuaciones (13) y (20):

$$F(t) = C.(1+i)^t + \frac{-A}{k+i}.(1-k)^t \qquad (21)$$

La ecuación (21) es la solución general de la ecuación (2), sin embargo se hace necesario estimar la constante arbitraria "C". Para el efecto, sabemos que el valor de "F" en el periodo "0" es justamente "0". Reemplazando en (21):

$$0 = (1+i)^0.C + \frac{-A}{k+i}.(1-k)^0$$

Despejando "C":

$$C = \frac{A}{k+i} \qquad (22)$$

Reemplazando el valor de "C" en (21):

$$F(t) = \frac{A}{k+i}.(1+i)^t + \frac{-A}{k+i}.(1-k)^t \qquad (23)$$

Efectuando arreglos tenemos:

$$F(t) = \frac{A}{k+i}.(1+i)^t - \frac{A}{k+i}.(1-k)^t \qquad (24)$$

Finalmente llegamos a la siguiente ecuación:

$$F(t) = \frac{A}{k+i}.\left[(1+i)^t - (1-k)^t\right] \qquad (25)$$

Asumiendo que "t" es igual que "n", obtenemos la solución general de la ecuación (2):

$$F(n) = \frac{A}{k+i}.\left[(1+i)^n - (1-k)^n\right] \qquad (26)$$

La ecuación (26) es el valor futuro de una serie variable con gradiente geométrico decreciente, con la condición de que la tasa de interés sea diferente que la tasa de crecimiento de las rentas.

Si multiplicamos la ecuación (26) por un factor simple de actualización, tenemos:

$$F(n).\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{A}{k+i}\left[(1+i)^n - (1-k)^n\right].\frac{1}{(1+i)^n} \qquad (27)$$

Finalmente, llegamos a la siguiente ecuación:

$$P = \frac{A}{k+i}\left[1 - \frac{(1-k)}{(1+i)}\right]^n . \qquad (28)$$

<u>b) Caso 2: la tasa de interés es igual que la tasa de crecimiento de las rentas</u>

Cuando la tasa de interés es igual que la tasa de crecimiento de las rentas, los resultados son totalmente diferentes en cuanto se refiere a las fórmulas.

La ecuación en diferencia a ser resuelta será la siguiente:

$$F_{t+1} - (1+i).F_t = A(1-i)^t \qquad (29)$$

En la ecuación anterior se puede apreciar que la tasa de crecimiento de las rentas ha sido reemplazada por la tasa de interés. Para efectos de simplificación, asumimos que:

$$(1-i) = a \qquad (30)$$

En tal sentido, la ecuación (29) quedaría de la siguiente forma:

$$F_{t+1} - a.F_t = A.a^t \qquad (31)$$

<u>La solución general de la ecuación homogénea</u>

La solución general de la ecuación homogénea será:

$$F_h(t) = C.(1-i)^t \qquad (32)$$

La solución particular

Siguiendo con el método utilizado, tenemos que:

$$A.(1-i)^t = g(t) \qquad (33)$$

La ecuación (33) es una función exponencial, por tanto, su solución también debe ser una función del mismo tipo:

$$F_p(t) = K.t.(1-i)^t \qquad (34)^6$$

Convirtiendo la ecuación (14) al periodo "t+1"

$$F_p(t+1) = K.(t+1).(1-i)^{t+1} \qquad (35)$$

Reemplazando (34) y (35) en la ecuación (29), tenemos:

$$K.(t+1)(1-i)^{t+1} - (1+i)K.t.(1-i)^t = A.(1-i)^t \qquad (36)$$

Efectuando arreglos algebraicos:

$$\begin{aligned}
&K.(1-i).(1-i)^t - (1+i).K.(1-i)^t = A.(1-i)^t \\
&K.(1-i)^t\left[(1-i)-(1+i)\right] = A.(1-i)^t \\
&K.(1-i)^t\left[(1-i-1-i)\right] = A.(1-i)^t \qquad (37)\\
&K.(1-i)^t.(-2.i) = A.(1-i)^t \\
&(-2.i).K.(1-i)^t = A.(1-i)^t
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes para el caso de "A"

$$-2.i.K = A \qquad (38)$$

despejando "K"

$$K = \frac{-A}{2.i} \qquad (39)$$

Reemplazando "K" en la ecuación (34):

[6] En este caso el lector apreciará que la solución particular incluye a la variable "t", pues, si observamos la ecuación (31), el coeficiente "a" está en el miembro de la izquierda así como en el de la derecha; este es un caso especial del método de los coeficientes indeterminados, ya que si no se considera la variable "t", no se llegaría a una solución.

$$F_p(t) = \frac{-A}{2.i}.(1-i)^t \qquad (40)$$

Sumando ambas soluciones, ecuaciones (32) y (40):

$$F(t) = C.(1+i)^t - \frac{A}{2.i}.(1-i)^t \qquad (41)$$

La ecuación (41) es la solución general de la ecuación (29), sin embargo se hace necesario estimar la constante arbitraria "C". Para el efecto, sabemos que el valor de "F" en el periodo "0" es justamente "0". Reemplazando en (41):

$$0 = (1+i)^0.C - \frac{A}{2.i}.(0).(1-i)^0$$

Despejando "C":

$$C = \frac{A}{2.i} \qquad (42)$$

Reemplazando el valor de "C" en (41):

$$F(t) = \frac{A}{2.i}.(1+i)^t - \frac{A}{2.i}.(1-i)^t \qquad (43)$$

Finalmente llegamos a la siguiente ecuación:

$$F(t) = \frac{A}{2.i}\left[(1+i)^t - (1-i)^t\right] \qquad (44)$$

Asumiendo que "t" es igual que "n", obtenemos la solución general:

$$F(n) = \frac{A}{2.i}\left[(1+i)^n - (1-i)^n\right]; i = k \qquad (45)$$

Si multiplicamos la ecuación (25) por un factor simple de actualización, tenemos:

$$F(n).\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{A}{2.i}\left[(1+i)^n - (1-i)^n\right]\frac{1}{(1+i)^n} \qquad (46)$$

Efectuando arreglos, obtenemos la fórmula para hallar el valor presente de una serie variable con gradiente geométrico decreciente cuando la tasa de interés es igual que la tasa de crecimiento de las rentas:

$$P = \frac{A}{2.i}\left[\frac{(1+i)^{n} - (1-i)^{n}}{(1+i)^{n}}\right]; i = k \qquad (47)$$

Sin embargo, la ecuación (45) y (47) se pueden obtener directamente utilizando la ecuación (26) y (28), respectivamente, asumiendo que la tasa de interés es igual que la tasa de decrecimiento[7] de las rentas.

[7] Cuando se reemplaza la tasa de decrecimiento, se obvia el signo negativo, de allí que $i + k = 2i = 2k$