La Capitalización con una Tasa de Interés Compuesta

La capitalización con interés compuesto, a diferencia del caso del interés simple, se caracteriza porque ocasiona que el valor futuro de un capital aumente de manera exponencial y no de manera lineal.

Sea un capital inicial de 1,000.00 unidades monetarias (u.m.), una tasa de interés mensual del 10%, y un horizonte de tiempo de dos meses.

El valor futuro a fines del periodo “1” será:

$$\boxed{S_1 = 1000 + (1000).(0.1)}$$

Se puede observar que en el primer periodo de capitalización, el resultado es el mismo que el del caso del interés simple. A fines del periodo “2”, la capitalización se hará en base al valor futuro hallado a fines del primer periodo y no en base al capital inicial, como es el caso del interés simple. En tal sentido, tendremos la siguiente fórmula:

$$\boxed{S_2 = 1000 + (1000).(0.1) + (1000 + (1000).(0.1)).(0.1)}$$

lo cual sería lo mismo plantear los siguiente:

$$\boxed{S_2 = S_2 + S_2.(0.1)}$$

efectuando arreglos tendremos:

$$\boxed{S_2 = 1000.(1 + 0.1)^2 = 1210.00\,u.m.}$$

Si la capitalización de un capital “P” se efectúa “n” periodos, se podrá plantear una ecuación general para el valor futuro con tasa de interés compuesta “i” de la siguiente manera:

$$\boxed{S_n = P.(1+i)^n}$$

Esta ecuación puede ser graficada en un espacio “valor futuro” versus “periodos de tiempo” de la siguiente manera:

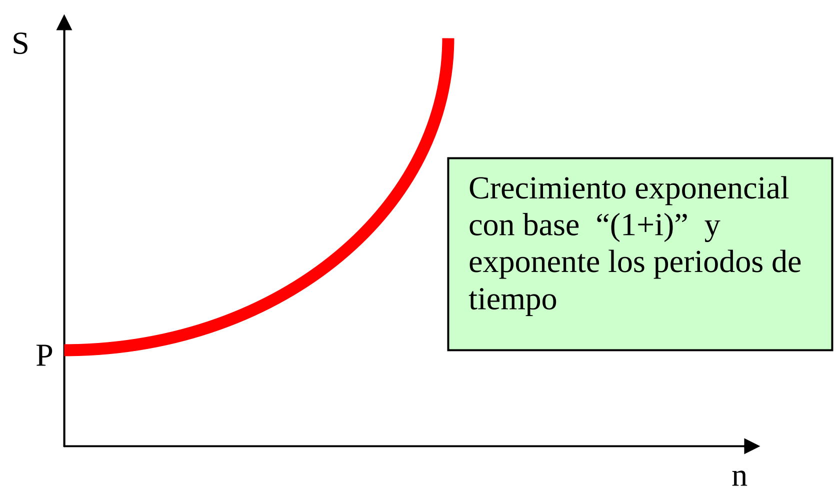

Figura Nº 1

El Valor Presente

El proceso de actualización es el inverso del proceso de capitalización. Para obtener un valor presente deberá “actualizarse” un valor futuro, debiendo tener como información la tasa de interés ”i”, un valor futuro “S” y una cantidad de periodos de actualización.

Conociendo la ecuación del valor futuro, se puede deducir fácilmente la del valor presente, la misma que a continuación se plantea:

$$\boxed{P = \frac{S}{(1+i)^n}}$$

Supongamos que una persona desea tener dentro de dos meses la cantidad de 1,210.00 u.m. sabiendo de antemano que una institución financiera paga una tasa de interés mensual del 10%, la pregunta será: ¿cuánto tendrá que depositar esta persona para lograr su objetivo? Si aplicamos la ecuación anterior tenemos que dicha persona deberá depositar una cantidad de 1,000.00 u.m.

Visto de otro ángulo, si la misma persona tiene pleno conocimiento que dentro de dos meses recibirá una cantidad de 1,210.00 u.m. y decide hoy endeudarse de tal manera que en dos meses pueda pagar la deuda, es decir, el principal y los intereses, la pregunta a ser formulada sería la siguiente: ¿cuánto podrá ser la deuda hoy de esta persona sabiendo que en dos meses tendrá un monto de 1,210.00 u.m. para pagarla?. La respuesta será: la persona podrá endeudarse hasta por 1,000 u.m. a ser pagados en dos meses con una tasa de interés del 10% mensual.

<u>El Interés Acumulado</u>

En el siguiente gráfico se puede observar el proceso de capitalización y la formación del interés acumulado (I).

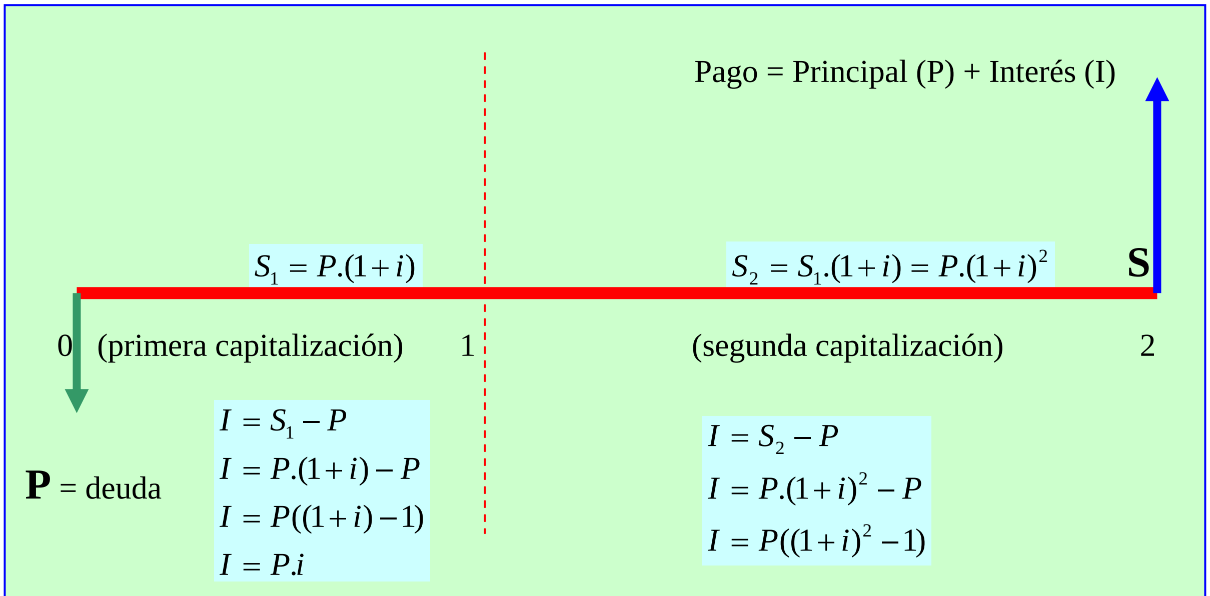

Figura Nº 2

En la figura Nº 2 se puede apreciar el proceso de la capitalización y la generación del interés acumulado (I) para el primer y segundo periodo. El interés del primer periodo coincide con el interés simple en vista que la tasa de interés se aplica al principal "P", el mismo que aún no ha variado. En el caso del periodo dos, el interés es aplicado sobre el nuevo capital que se ha formado al final del periodo uno como producto de la primera capitalización. En tal sentido el nuevo capital a fines del periodo uno se basa en el capital inicial, pero el capital final, a fines del periodo dos, tiene como base el capital formado a fines del periodo uno. Esta es la gran diferencia con respecto al caso del interés simple.

El interés acumulado en el periodo dos será la diferencia entre el capital final y el capital inicial, tal como se puede apreciar en las ecuaciones planteadas en la Figura Nº 2.

El Interés Marginal

Para hallar el interés generado en un periodo, al que llamaremos el interés marginal, se resta al valor futuro del periodo "n" y el valor futuro del periodo "n-1". Siguiendo el ejemplo de la Figura Nº 2 donde "n = 2" tenemos que:

$$\begin{aligned} I_{2-1} &= P.(1+i)^2 - P.(1+i) \\ I_{2-1} &= P.(1+i).(1+i-1) \\ I_{2-1} &= P(1+i).i \end{aligned}$$

En términos generales:

$$\begin{aligned} I_{n/(n-1)} &= P(1+i)^n - P(1+i)^{n-1} \\ I_{n/(n-1)} &= \frac{P(1+i)^n}{(1+i)}.i \\ I_{n/(n-1)} &= P(1+i)^{n-1}.i \end{aligned}$$

Con la ecuación[1] antes planteada se estima el interés generado entre dos periodos consecutivos.

Si sumamos el interés generado el periodo uno y el periodo dos obtenemos el interés acumulado. En otras palabras, la suma de los intereses marginales es el interés acumulado.

La suma del interés en el periodo uno y dos será:

$$\boxed{\begin{aligned} I &= P.i + P(1+i).i \\ I &= Pi((1+i)+1) \end{aligned}}$$

Efectuando arreglos, tenemos que:

$$\boxed{I = P((1+i)+1)((1+i)-1)}$$

donde el último factor del miembro de la derecha es igual a “i”

En la última ecuación se aplica la propiedad algebraica de diferencias de cuadrados y tenemos que:

$$\boxed{I = P((1+i)^2 - 1)}$$ [2]

la misma que coincide con la fórmula descrita anteriormente en la Figura Nº 2 , por lo que se demuestra que la suma de los intereses marginales dan el interés acumulado.

---

[1] Para llegar a la fórmula, se considera como factor común $P(1+i)^n$ quedando la expresión: $P(1+i)^n(1-(1+i)^{-1})$, resolviendo se obtiene la ecuación final

[2] Sabemos que $(a^2-b^2)=(a+b)(a-b)$; en este caso particular, a=(1+i), y b=1, luego, $((1+i)^2-1^2)=((1+i)+1)((1+i)-1)$;

La Capitalización con Variaciones en las Tasas de Interés

La capitalización con interés compuesto también se puede efectuar con variaciones de las tasas de interés. Supongamos que un capital de S/.1,000.00 u.m., una tasa de interés del 10% mensual, y un horizonte de tiempo de 4 meses. Aplicando la fórmula respectiva tenemos que:

$$\boxed{S = 1000(1 + 0.1)^4}$$

que también puede ser expresado:

$$\boxed{S = 1000(1 + 0.1)(1 + 0.1)(1 + 0.1)(1 + 0.1)}$$

Si se modifican las tasas de interés, por decir, a partir del segundo mes con las siguientes tasas: 11%, 12% y 13%, respectivamente, entonces la ecuación anterior se puede plantear de la siguiente forma:

$$\boxed{S = 1000(1 + 0.1)(1 + 0.11)(1 + 0.12)(1 + 0.13)}$$

En esta ecuación, cada tasa de interés es mensual, y cada periodo de tiempo de cada tasa de interés también es mensual, para efectos de simplificación. En tal sentido la tasa de interés y el exponente de cada factor tienen la misma unidad de tiempo.

Supongamos que cada una de las tasas de interés tienen diferentes periodos de tiempo, de la siguiente manera: n1 = 20 días, n2 = 25 días, n3 = 35 días, y n4 =18 días; las tasas de interés siguen siendo mensuales, entonces se observa que la unidad de tiempo de las tasas de interés y los exponentes “n” no coinciden porque los primeros están en meses y los segundos en días. Dada esta diferencia en las unidades de tiempo, si se mantienen las tasas de interés en meses, los exponentes “n” deberán convertirse a la misma unidad, es decir, en meses.

En el primer factor, la tasa de interés mensual es de 10% y el periodo es de 20 días, entonces los 20 días se convierten a meses dividiendo 20 entre 30 días, es decir, 20 días son $\frac{20}{30}$ meses. El capital, entonces se capitaliza con una tasa de interés del 10% una cantidad de $\frac{20}{30}$ veces. En este primer periodo, el horizonte de tiempo (H) es de 20 días, y el periodo capitalizable es de 30 días (f). En otras palabras, el capital da $\frac{H}{f}$ vueltas dada la tasa de interés.[3]

Así, la tasa de interés y el número de capitalizaciones deben estar en la misma unidad de tiempo. En tal sentido “H” y “f” pueden estar en días, meses, trimestres, semestres, etc.

[3] Terminología utilizada en el texto de “Apuntes de Estudio: Manual de Matemática Financiera” ;autor: Carlos Aliaga Valdez; 3era. Edición corregida en 1998; Universidad del Pacífico, Centro de Investigación, Lima.

Supongamos que "H" está en días, y la tasa de interés está en meses, es decir, la tasa de interés es mensual (f = 30 días), entonces, el ratio antes mencionado deberá convertir días en meses, de acuerdo a la siguiente fórmula de conversión de días a meses:

$$\boxed{H(días).\frac{1(mes)}{30(dias)} = \frac{H}{30}(meses)}$$

Por ejemplo, si H = 55 días y el periodo capitalizable es de 30 días (f), entonces el periodo de 55 días tiene aproximadamente 1.83 periodos de 30 días. En otras palabras, 55 días son aprox. 1.83 meses.

Aplicando la fórmula de conversión, tenemos:

$$\boxed{55días.\frac{1(mes)}{30dias} = \frac{55}{30}meses = 1.83meses = \frac{H}{f}meses}$$

En este ejemplo, el periodo de capitalización es de 30 días (f), luego el ratio $\frac{H}{f}$ estará en la misma unidad de tiempo de la tasa de interés.

Siguiendo el ejemplo de capitalización con diferentes tasas de interés:

$$\boxed{S = 1000(1+0.1)^{\frac{20}{30}}(1+0.11)^{\frac{25}{30}}(1+0.12)^{\frac{35}{30}}(1+0.13)^{\frac{18}{30}}}$$

Formalización de la Capitalización y Actualización con diferentes Tasas de Interés

Sea ”P” un principal, la tasa de interés “i_j” y los periodos de tiempo “n_j” donde “j” varía de un valor de “1” a “m”. Las tasas de interés y el exponente de capitalización coinciden en la unidad de tiempo, dado un horizonte de tiempo “H” explicado por la siguiente sumatoria:

$$\boxed{H = \sum_{j=1}^{m} n_j}$$

el valor futuro de “P” es explicado por la siguiente ecuación:

$$\boxed{S = P.(1+i_1)^{n1}(1+i_2)^{n2}.......... \quad ....(1+i_m)^{n_m}}$$

En esta fórmula, la unidad de tiempo y los exponentes coinciden en relación a la unidad de tiempo, por lo que la estimación del valor futuro se hace simple.

Si se asume que las tasas de interés no coinciden con el exponente de capitalización en la unidad de tiempo, entonces la ecuación general será la siguiente:

$$S = P(1+i_1)^{\frac{H_1}{f_1}}(1+i_2)^{\frac{H_2}{f_2}}(1+i_3)^{\frac{H_3}{f_3}}...(1+i_m)^{\frac{H_m}{f_m}}$$

donde:

$$H = H_1 + H_2 + ... + H_m$$

La ecuación del valor futuro deducida anteriormente nos explica que un capital se capitaliza con las diferentes tasas de interés durante el horizonte de tiempo de la operación financiera. Cada una de éstas, tiene un periodo de tiempo. Al ser la tasa de interés compuesta, el capital irá variando cada vez que se modifique la tasa de interés. Estos cambios se originan en cada uno de los factores simples de capitalización, es decir, si existen “m” tasas de interés, habrán “m” factores simples de capitalización.

En la figura Nº 3 se puede apreciar una capitalización y una actualización con “m” tasas de interés, y cada una de éstas se relaciona con un periodo de tiempo “H”. Asimismo, cada tasa de interés tiene un periodo de capitalización ”f”

En el caso de la capitalización, el capital o valor presente “P” se capitaliza “m” veces, con diferentes tasas de interés y periodos de tiempo. Para cada tasa de interés deberá existir un factor simple de capitalización y así, el capital “P” irá variando en cada uno de los periodos.

Figura Nº 3

Por ejemplo, los periodos “H” pueden estar en días o meses y las tasas de interés pueden ser mensuales, bimestrales, trimestrales, cuatrimestrales, semestrales o anuales.

Es importante destacar y dar énfasis en el caso explicado en el párrafo anterior. En tal sentido se plantea lo siguiente: “si las tasas de interés están en una diferente unidad de tiempo que el coeficiente de capitalización “n”, en este caso, tal como se explicara anteriormente, este coeficiente deberá convertirse a la misma unidad de tiempo que el de la tasa de interés de tal manera que la capitalización se pueda efectuar y calcular”.

En el caso de la actualización, el método es el mismo pero se trata de convertir un stock futuro en un stock presente. El valor futuro irá variando en los periodos de tiempo según la tasa de interés y los días de cada uno de los periodos.

Si se tiene la información de los siguientes datos: un valor futuro, las tasas de interés de capitalización compuesta y los periodos de tiempo de cada tasa de interés, y se despeja la variable “P” de la ecuación de capitalización antes planteada, tenemos:

$$P = S.\frac{1}{(1+i_1)^{\frac{H_1}{f_1}}(1+i_2)^{\frac{H_2}{f_2}}(1+i_3)^{\frac{H_3}{f_3}}\ldots(1+i_m)^{\frac{H_m}{f_m}}}$$

En la figura Nº 3 también se aprecia el proceso de la actualización con diferentes tasas de interés. Este proceso consiste en que el valor futuro va variando en cada uno de los periodos que tiene diferente tasa de interés.

La Ecuación de Valor

En muchas operaciones financieras se hace necesario consolidar las deudas que pueden ser vencidas y por vencer de tal manera de poder cancelarlas con un pago único o en varios pagos. También se hace necesario reformular los pagos a través de un nuevo financiamiento con el objetivo de diseñar un conjunto de obligaciones dada una deuda que provendría de no haber efectuado los pagos de las deudas vencidas o también por no contar con liquidez en el momento de vencimiento de las obligaciones.

La ecuación de valor es un instrumento de la matemática financiera que permite igualar un conjunto de documentos de deuda con un pago único o también con un conjunto de pagos, los mismos que pueden ser iguales, crecientes o decrecientes, tanto de manera lineal o geométrica.

Figura Nº 4

Si se observa la Figura Nº 4, al igualar las deudas con los pagos que se desean efectuar se forma una ecuación. Esta ecuación deberá tener una sola incógnita para su solución. Además, es importante resaltar que las deudas así como los pagos de éstas, estarán en diferentes periodos de tiempo por los que la igualación solamente se podrá efectuar con valores equivalentes en un mismo periodo, dada las tasas de interés existentes en el horizonte de tiempo que involucra las deudas y los pagos. Para poder igualar los pagos con las deudas deberá recurrirse a los procesos de capitalización y/o actualización de los diferentes valores de las deudas (vencidas o por vencer) y de los pagos (pago) que se efectuarán (efectuará) en el futuro o en el presente, según sea el diseño de éstos (éste). Para poder diseñar la ecuación que iguale los pagos con las deudas deberá escogerse una fecha determinada de tal manera que todas las obligaciones y pagos por efectuar se igualen eliminando así la distorsión de la diferencias de periodos. A esta fecha se le conoce como la “fecha focal”.

Para explicar con mayor detalle la ecuación de valor, daremos un ejemplo hipotético de una empresa que tiene dos deudas vencidas y dos deudas por vencer y que el día de “HOY” desea consolidar y pagar el total de sus obligaciones.

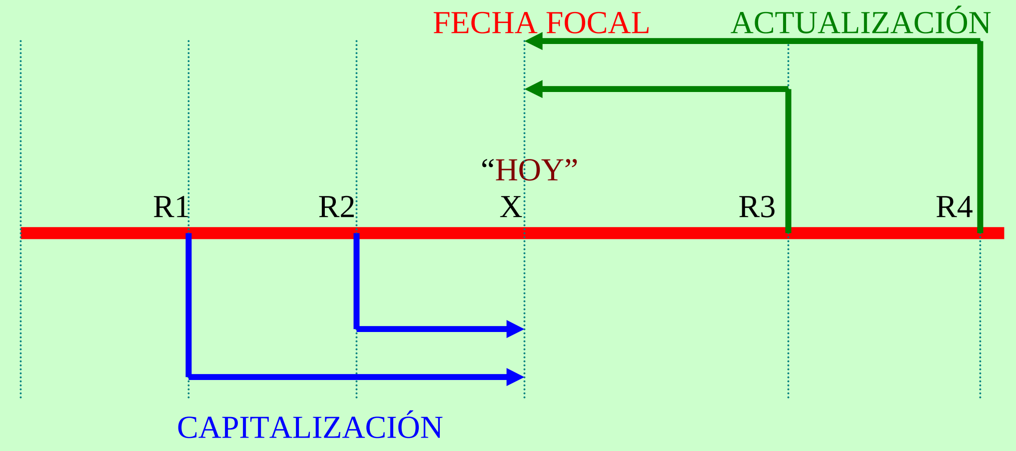

Figura Nº 5

En la Figura Nº 5 se observa que R1 y R2 son deudas vencidas porque están en el pasado del periodo "HOY", en el cual se efectuará la consolidación de estas deudas y su pago respectivo. Estas deudas deberán ser capitalizadas dependiendo de la cantidad de días de morosidad y de las tasas de interés durante dicho periodo, pudiendo ser una sola o diferentes tasas de interés, según sea el caso.

También se observan dos deudas por vencer porque están en el futuro. Estas deudas deberán actualizarse al periodo "HOY" de tal manera de consolidarlas y pagarlas, al igual que el caso anterior.

En tal sentido, una ecuación de valor requiere de la siguiente información:

a) Conjunto de obligaciones vencidas o por vencer

b) Cantidad de días o meses entre cada deuda y la fecha focal o fecha de pago

c) La tasa de interés que existiría en los periodos que separan las deudas y la fecha focal o fecha de pago

d) Si se efectuarán varios pagos, entonces éstos deberán estar relacionados de manera matemática o algebraica, de tal manera que la ecuación de valor tenga solamente una incógnita. Caso contrario, no podrá ser desarrollada.

El planteamiento de la ecuación sería el siguiente:

$$\boxed{X = R_1(1+i)^{n1} + R_2(1+i)^{n2} + \frac{R_3}{(1+i)^{n3}} + \frac{R_4}{(1+i)^{n4}}}$$

En este caso, los periodos “n” están la misma unidad que la tasa de interés para efectos de simplificación de la explicación. Los periodos señalados estarían en días, y la tasa de interés sería también diaria, pudiendo estar en diferentes unidades de tiempo.

Sin embargo, se hace necesario investigar que pasaría si se escoge otra fecha focal, en lugar de la fecha de pago (periodo “HOY”).

Para el efecto asumamos que los pagos están separados por periodos de 30 días, o meses exactamente, y que la tasa de interés es mensual. Cada periodo es un mes, es decir, R1 está dos meses en el pasado, R2, un mes en el pasado, R3, un mes en el futuro, y R4, dos meses en el futuro, a partir del periodo “HOY”. Si continuamos con la fecha focal igual que el de la Figura Nº 5, tenemos la siguiente ecuación de valor:

$$X = R_1(1+i)^2 + R_2(1+i)^1 + \frac{R_3}{(1+i)^1} + \frac{R_4}{(1+i)^2}$$

En esta ecuación, se puede apreciar que la deuda R1 se ha capitalizado dos veces, la deuda R2 una vez, la deuda R3 se ha actualizado una vez y finalmente la deuda R4 se ha actualizado dos veces.

Ahora bien, si se multiplica la ecuación anterior por el factor:

$$(1+i)$$

la igualdad de la ecuación no se verá alterada y la solución será la misma que la anterior ecuación. Así tenemos que:

$$X(1+i) = R_1(1+i)^3 + R_2(1+i)^2 + R_3 + \frac{R_4}{(1+i)^1}$$

Si observamos la ecuación anterior, vemos que “X”, el pago único, se ha capitalizado una vez, al igual que cada una de las deudas. Si se sigue el diagrama de flujos de la Figura Nº 5, todos los montos han corrido un periodo o un mes.

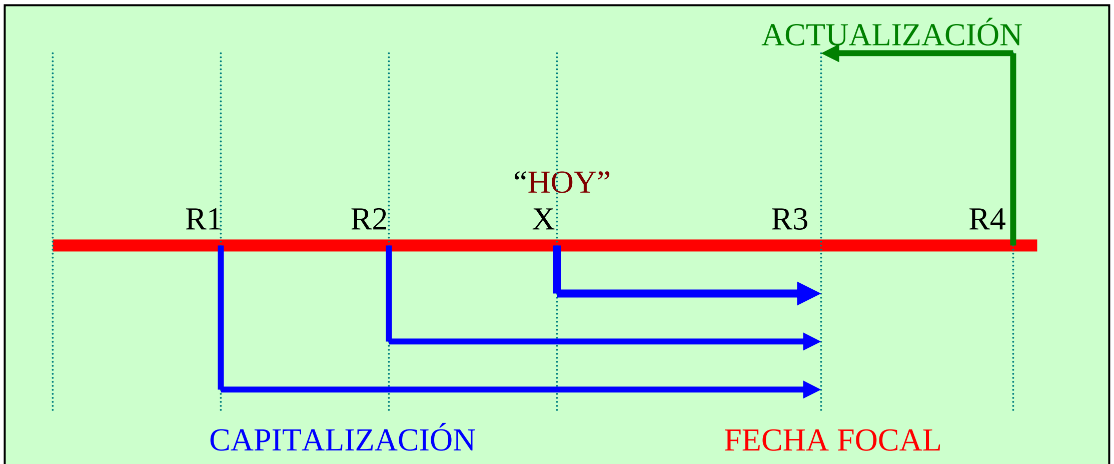

Figura Nº 6

Con el nuevo diagrama de flujos, el mismo que se puede apreciar en la Figura Nº 6, la deuda “R3” no es capitalizada ni actualizada justamente porque coincide con la nueva “fecha focal”. Así, la operación efectuada ha tenido como resultado modificar la fecha focal al periodo que coincide con la deuda R3.

El resultado será el mismo, tal como se señalara anteriormente. Este análisis demuestra que el resultado no varía aún cuando se escojan diferentes fechas focales.

Se desprende así que “una ecuación de valor que se caracteriza por tener tasas de interés compuestas, la solución será la misma escogiendo diferentes fechas focales”.

Otro punto importante es que la fecha focal es independiente del enunciado del problema o ejercicio. En el caso de que exista una serie de deudas (vencidas y/o por vencer) y un pago único, lo recomendable es escoger la fecha focal en el mismo periodo del pago único, con miras ha simplificar las operaciones matemáticas. Sin embargo, modificar la fecha focal no influye en el resultado del valor de “X”. La fecha escogida del pago único es una condición del problema que responde al diseño del mismo. Variar la fecha de pago no es lo mismo que variar la fecha focal. En el primer caso, el resultado será distinto, mientras que en el segundo caso, el resultado será el mismo.

En el caso que la operación financiera tenga una deuda y un conjunto de pagos, que sería el caso opuesto al desarrollado anteriormente, lo recomendable es escoger la fecha focal en el periodo de tiempo que coincide con la deuda única. En este caso, la ecuación de valor seguirá con una sola incógnita “X”, pero esta ecuación deberá ser planteada de tal manera que los pagos tengan una relación matemática. Por decir, si lo pagos son iguales, entonces el caso es sencillo simple. También los pagos puedes crecer a una tasa determinada, digamos k%, o aumentar en un valor absoluto, por ejemplo, S/.100. En el primer caso, los pagos aumentarán de manera geométrica, y en el segundo caso, crecerán de manera lineal.

Mg. Marco A. Plaza Vidaurre

****