SUPERFICIES TUBULARES

Mg. Mariano González Ulloa
Pontificia Universidad Católica del Perú
mgonzal@pucp.edu.pe

1. Introducción

Tanto en ingeniería como en ciencias se usan superficies en forma de tubos (oleodúctos, tubos de ensayo, vasos comunicantes, envases tubulares, etc.). En muchos casos dichas superficies se ajustan a ciertos modelos de curvas. A éstas superficies las denominaremos "superficies tubulares". Aquí se presenta una forma sencilla para construir esta clase de superficies partiendo de una curva base y desplazando otra curva a lo largo de la primera. Además con la ayuda de los programas Mathematica y Cabri 3D se mostrará algunos ejemplos.

2. Curvas

Definición 2.1 *Una curva* Γ *en* $\mathbb{R}^3$ *es la imagen de una aplicación continua* $\vec{\alpha}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$*, es decir que* $\Gamma = \vec{\alpha}([a,b])$.

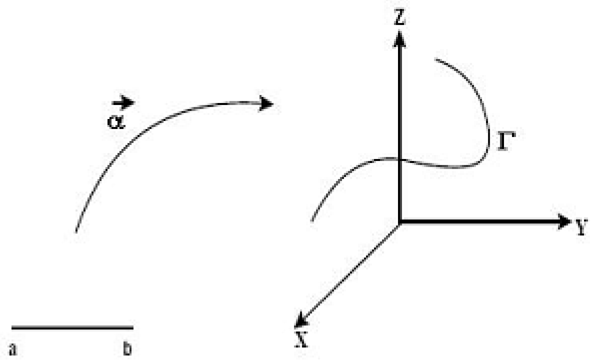

Figura 1. Una curva en $\mathbb{R}^3$

Sea Γ una curva generada por la función vectorial $\vec{\alpha}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a,b]$, diferenciable en el intervalo $]a,b[$. El vector $\vec{\alpha}'(t) = \dfrac{d\vec{\alpha}(t)}{dt}$ es el vector tangente a Γ y

$$\vec{T} = \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\left\|\vec{\alpha}'(t)\right\|}$$

es el vector unitario tangente a la curva Γ. También se definen otros dos vectores unitarios que juegan un papel muy importante en el estudio de las curvas, ellos son:
el vector unitario normal principal

$$\vec{N}=\frac{\vec{\alpha}'(t)\times\vec{\alpha}''(t)}{\left\|\vec{\alpha}'(t)\times\vec{\alpha}''(t)\right\|}$$

cuando $\vec{\alpha}''(t)\neq 0$ y el vector unitario binormal $\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$. Estos tres vectores unitarios son mutuamente ortogonales.

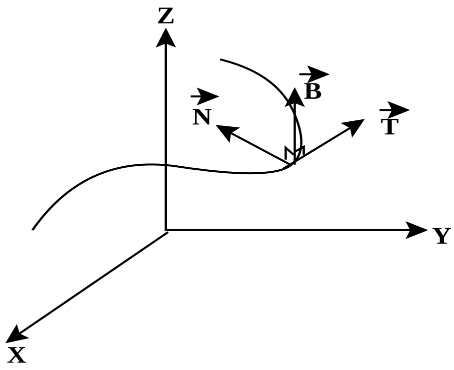

Figura 2. Triedro móvil de una curva

3. Superficies Tubulares

Definición 3.1 *Una superficie S en $\mathbb{R}^3$ es la imagen de una aplicación continua $\vec{r}:\mathcal{R}\rightarrow\mathbb{R}^3$ definida en una región conexa $\mathcal{R}$ del plano, es decir que $S=\vec{r}(\mathcal{R})$.*

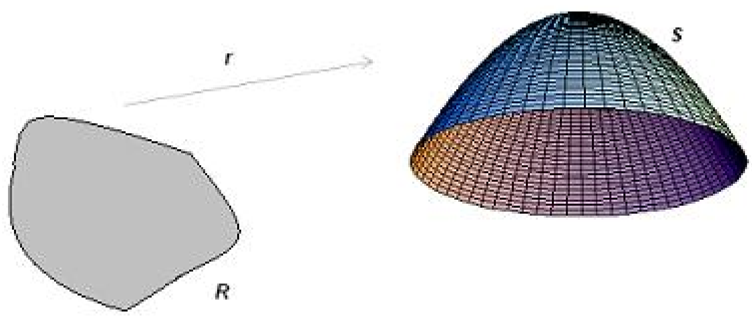

Figura 3. Definición de superficie

Definición 3.2 *Una superficie tubular es aquella que se genera por la traslación, de una curva plana (curva contenida en un plano) y cerrada C, a lo largo de otra curva Γ de manera que el vector tangente a Γ sea perpendicular al plano que contiene a la curva C.*

Figura 4. Generación de una superficie tubular

En esta presentación se muestra la construcción de superficies tubulares para el caso en que la curva C es una circunferencia.

Sea Γ una curva generada por la función $\overrightarrow{\alpha}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$, $t \in [a,b]$ con $\overrightarrow{T}(t)$, $\overrightarrow{N}(t)$, $\overrightarrow{B}(t)$ sus vectores unitarios tangente, normal y binormal respectivamente en el punto $\overrightarrow{\alpha}(t) \in \Gamma$.

La aplicación $\overrightarrow{r}(u,v) = \overrightarrow{\alpha}(u) + R\ Cos(v)\ \overrightarrow{N}(u) + R\ Sen(v)\ \overrightarrow{B}(u)$; $u \in [a,b]$; $v \in [0, 2\pi]$, donde R es el radio de la circunferenca C, genera una superficie tubular de radio R.

4. Ejemplos

1. El toro, es la superficie que se genera trasladando una circunterencia, C, de radio a alrededor de una circunferecnia, Γ, de radio b, $a < b$, manteniendo el centro de C en Γ.

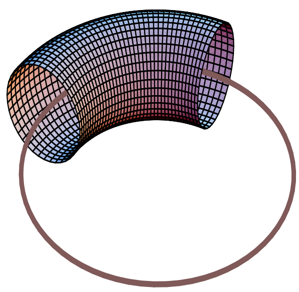

Figura 5.a. El toro

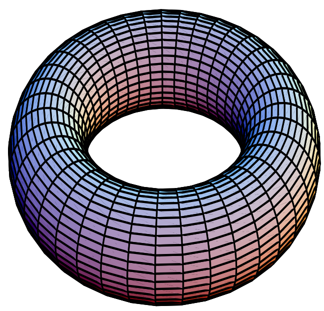

Figura 5.b. El toro

2. La superficie *helicoidal circular* la cual se genera a partir de una hélice circular $\overrightarrow{\alpha}(t) = (cos\ t,\ sen\ t, \frac{t}{2})$; $t \in [0, 4\pi]$ y una circunferencia de radio 1, como se mustra en el siguiente gráfico:

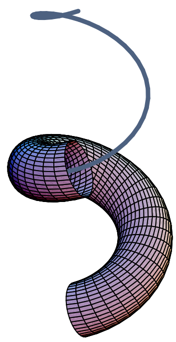

Figura 6.a. Helicoide circular

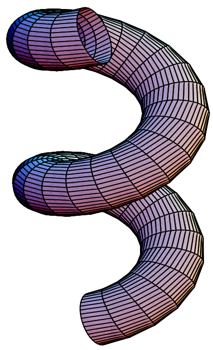

Figura 6.b. Helicoide circular

La función que genera la superfice es

$$\vec{r}\,(t,u)=\big(cos\,t-\frac{1}{2}\,cos\,t\;cos\,u+\frac{sen\,t\;sen\,u}{2\sqrt{5}},\;sen\,t-\frac{1}{2}\,cos\,u\;sen\,t-\frac{cos\,t\;sen\,u}{2\,\sqrt{5}},\;\frac{t}{2}+\frac{sen\,u}{\sqrt{5}})$$

$;\,0\leq t\leq 4\pi\;,\;0\leq u\leq 2\pi$

3. La superficie *parabólica circular* cuya curva base es la parábola $\vec{\alpha}\,(t)=(0,\;t,\;t^2);\;-2\leq t\leq 2$

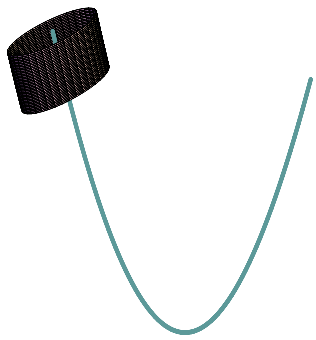

Figura 7.a.

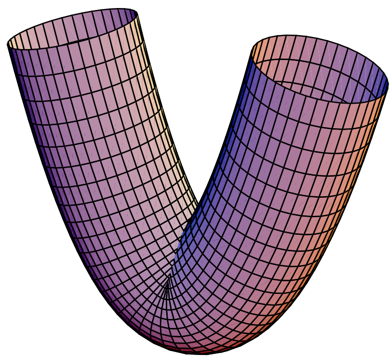

Figura 7.b. Sup. parabólica circular

La función que genera la superficie parabólica circular es

$$\vec{r}\,(t,u)=sen\,u\;\;\vec{i}\;+(t-\frac{2\,t\,cos\,u}{\sqrt{1+4\,t^2}})\;\vec{j}\;+(t^2+\frac{cos\,u}{\sqrt{1+4\,t^2}})\;\vec{k}\;;\;-2\leq t\leq 2,\;0\leq u\leq 2\pi$$

4. La superficie *senoidal circular* cuya curva base es la gráfica de la función seno $\vec{\alpha}\,(t)=\big(0,\;t,\;2\;sen\,t\big);\,0\leq t\leq 4\pi.$

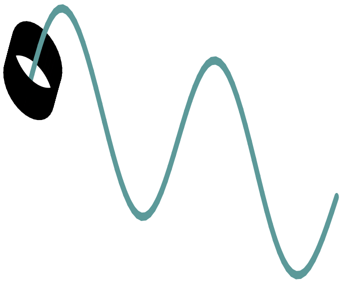

Figura 8.a.

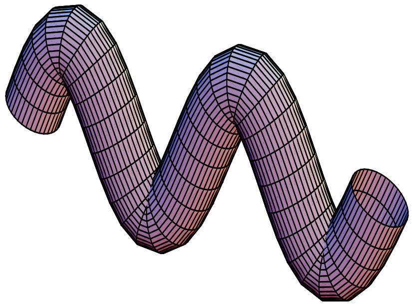

Figura 8.b. Sup. senoidal circular

La función que genera la superficie senoidal circular es

$$\overrightarrow{r}\ (t,u) = -sen\,u\ \overrightarrow{i}\ +(t+\frac{2\,cos\,t\,cos\,u}{\sqrt{3+2\,cos(2t)}})\ \overrightarrow{j}\ +(2\,sen\,t-\frac{cos\,u}{\sqrt{3+2\,cos(2t)}})\ \overrightarrow{k}\ ;$$

$0 \leq t \leq 4\pi,\ 0 \leq u \leq 2\pi$

Referencias

[1] Pita Ruiz, C. (1995). *Cálculo Vectorial*: Méxco: Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.

[2] Stewart, J. (2002). *Cálculo: Trascendentes Tempranas*: México: Thomson Learning.