Construcción de lugares geométricos en un ambiente de Geometría Dinámica

Mariano González Ulloa [1]
mgonzal@pucp.edu.pe
http://macareo.pucp.edu.pe/∼mgonzal/index.htm

13 de agosto de 2010

[1] Pont. Univ. Católica del Perú

Contenido

Introducción

- Cualquier actividad a realizar se convierte en un problema.
- En Matemáticas, una manera de introducir conceptos y resultados es resolviendo problemas. En particular, en la enseñanza de la Geometría.
- Una herramienta importante en este desarrollo es la Geometría Dinámica (GD).
- La GD ofrece ciertas ventajas para obtener la solución de problemas que requieren la construcción de lugares geométricos.
- Aquí presentamos algunos ejemplos, a través de los cuales, podremos ver las ventajas y limitaciones de la GD.

Objetivos

- Introducir conceptos y resultados de geometría a través de la resolución de problemas de geometría plana y tridimensional mediante la construcción de lugares geométricos.
- Conocer el manejo y uso de un programa de GD para realizar construcciones tanto en el plano como en el espacio tridimensional.
- Usar GD para conjeturar la solución de determinados problemas de construcciones geométricas.

Lugar Geométrico

Definición

Un lugar geométrico (LG) es el conjunto de todos los puntos que satisfacen una determinada propiedad. Si el lugar geométrico es definido por la propiedad P, entonces

- *Todo punto del LG satisface la propiedad P.*
- *Todo punto que satisface la propiedad P pertenece al LG.*

Por ejemplo, una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos, contenidos en un plano, que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Media aritmética y geométrica

Definición

Sean $a_1, a_2, \cdots, a_n$ números reales positivos, la **media aritmética** *de tales números es:*

$$MA = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

y la **media geométrica** *es:*

$$MG = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

Media aritmética y geométrica

Teorema

Si $a_1, a_2, \cdots, a_n$ son números reales positivos, entonces

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

La igualdad ocurre si y solo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

Prueba. Ver [Bulajich, 2005].

Problema 1

Dada una recta L y un punto F ubicados en un mismo plano, identificar el conjunto de puntos en dicho plano que equidistan de la recta L y del punto F.

Problema 1: solución

- Construya una recta L y un punto F.
- Elija un punto M en L.
- Trace la recta L' perpendicular a L por M.
- Construya la mediatriz del segmento FM.
- Marque el punto P, intersección de L' con la mediatriz de FM.

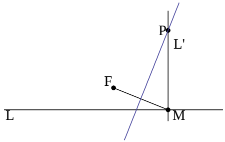

Figura: Perpendicular a L y mediatriz de FM

Problema 1: solución

- Marque el punto P, intersección de L' con la mediatriz de FM.
- Genere el LG de P cuando M se desplaza en L.

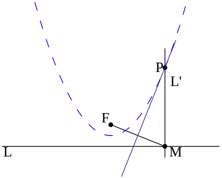

Figura: LG de los puntos que equidistan de F y L

Problema 2

Dados dos puntos A y B y una recta L contenidos en el mismo plano, construir una circunferencia que pase por A y B y sea tangente a la recta L.

Problema 2: solución

- Construir el LG de los puntos que equidistan de A y L, la parábola con directriz L y foco A.
- Construir la mediatriz del segmento AB.

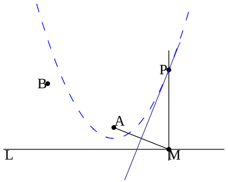

Figura: LG de los puntos que equidistan de A y L

Problema 2: solución

- Ubicar los puntos de intersección de la parábola y la mediatriz del segmento AB .
- Uno de estos puntos es el centro de la circunferencia tangente a L que pasa por A y B.

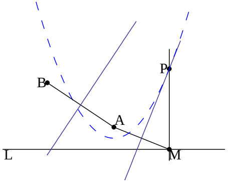

Figura: Mediatriz de A y B

Problema 2: solución

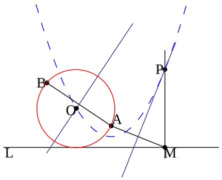

Figura: Circunferencia tangente a L que pasa por A y B

Problema 3

Dadas tres rectas paralelas, construir un triángulo equilátero de manera que cada vértice se encuentre en una de las rectas.

Problema 3: solución

- Construir tres rectas paralelas L1, L2 y L3.
- Elegir un punto M en L1 y B en L2.
- Tomar como lado MB y construir un triángulo equilátero MPB.

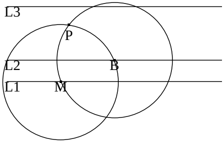

Figura: Triángulo equilátero MPB

Problema 3: solución

- Construir el LG de P cuando M se desplaza en L1.
- Fijar el punto C, intersección del LG de P con L3.

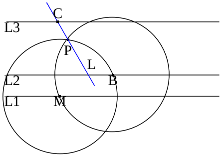

Figura: LG del vértice P

Problema 3: solución

- Construir la circunferencia con centro en B y que pasa por C.
- Llamar A al punto de intersección de la circunferencia con L1.

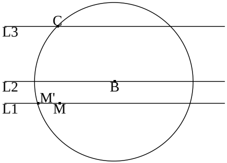

Figura: Circunferencia con centro en B y que pasa por C

Problema 3: solución

- El triángulo ABC es una solución del problema.

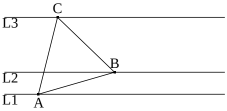

Figura: Triángulo ABC

Problema 4

Dados un punto P, una circunferencia C y una recta L. Construir una circunferencia que pase por P y sea tangente tanto a C como a L.

Problema 4: solución

- Sea O el centro de C.
- Elegir un punto Q en C.
- Construir la semirrecta OQ.
- Trazar la mediatriz M del segmento PQ.
- Construir el LG del punto de intersección de M con la semirrecta OQ cuando Q se desplaza en C.

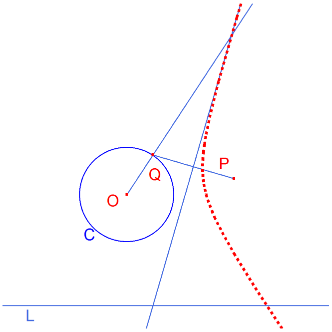

Figura: LG de la intersección de M y OQ

Problema 4: solución

- Construir el LG de los puntos que equidistan de P y L.
- Fijar una intersección A de los dos LGs.
- La circunferencia con centro en A que pasa por P es una solución del problema.

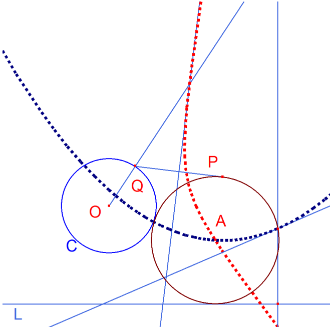

Figura: LG de los puntos que equidistan de P y L

Problema 5

Dadas tres circunferencias con el mismo centro y diferentes radios, construir un triángulo equilátero de manera que cada vértice del triángulo se encuentre en cada una de las circunferencias.

Problema 5: solución

- Llamar O al centro de las circunferencias.
- Construir las tres circunferencias C_1, C_2, C_3 con centro en O y radios $0 < r_1 < r_2 < r_3$, respectivamente.
- Elegir un punto A en C_1 y M en C_3.
- Construir el triángulo equilátero AMP.

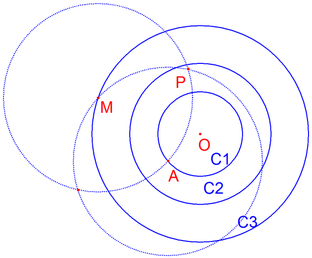

Figura: El triángulo equilátero AMP

Problema 5: solución

- Construir el LG de P cuando M se desplaza en C_3.
- Si existe, marcar el punto B intersección del LG y C_2.
- A partir del segmento AB construir el triángulo equilátero ABC.
- El triángulo ABC es una solución del problema.

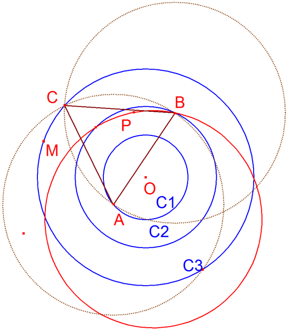

Figura: El triángulo equilátero ABC

Problema 6

Dados dos puntos F_1 y F_2 fijos en un plano π y d un número positivo mayor que la distancia entre F_1 y F_2, identificar el conjunto de puntos P del plano π tales que la suma de la distancia de P a F_1 más la distancia de P a F_2 sea igual a d.

Problema 6: solución

- Fijar los puntos F_1 y F_2.

Problema 6: solución

- Fijar los puntos F_1 y F_2.
- Construir la circunferencia C con centro en F_1 y radio igual a d.

Problema 6: solución

- Fijar los puntos F_1 y F_2.
- Construir la circunferencia C con centro en F_1 y radio igual a d.
- Elegir un punto M en C .

Problema 6: solución

- Fijar los puntos F_1 y F_2.
- Construir la circunferencia C con centro en F_1 y radio igual a d.
- Elegir un punto M en C .
- Trazar la mediatriz de F_2M.

Problema 6: solución

- Fijar los puntos F_1 y F_2.
- Construir la circunferencia C con centro en F_1 y radio igual a d.
- Elegir un punto M en C .
- Trazar la mediatriz de F_2M.
- Ubicar el punto P intersección de la mediatriz con F_1M.

Problema 6: solución

- Fijar los puntos F_1 y F_2.
- Construir la circunferencia C con centro en F_1 y radio igual a d.
- Elegir un punto M en C .
- Trazar la mediatriz de F_2M.
- Ubicar el punto P intersección de la mediatriz con F_1M.
- Construir el LG de P cuando M se desplaza en C. Es la solución del problema

Problema 7

Considerar una hoja de papel rectangular ABCD de lados a y b, $0 < a < b$. Doblar la hoja de manera que el vértice B "caiga" sobre el lado opuesto AD en el punto B´ formando el triángulo rectángulo PAB´ (P es el punto de doblez del lado AB). Hallar las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo PAB´ para que su área sea máxima.

Problema 7: solución

Sean a yb, $a < b$ los lados del rectángulo ABCD, x e y los catetos del triángulo rectángulo PAB' y $b - y$ su hipotenusa. Luego $x = \sqrt{b^2 - 2by}$. El área del triángulo es:

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}xy = \tfrac{1}{2}y\sqrt{b^2 - 2by} \\ A^2 &= \tfrac{1}{4}y^2(b^2 - 2by) = \tfrac{b}{4}yy(b - 2y) \\ &\leq \tfrac{b}{4}\left(\tfrac{y+y+b-2y}{3}\right)^3 \\ &\leq \tfrac{b^4}{4\times 27} \end{aligned}$$

El área máxima es $\frac{b^2}{6\sqrt{3}}$ y se alcanza cuando $y = \frac{b}{3}$, $x = \frac{b}{\sqrt{3}}$

Problema 8

Dado un segmento AB construir el LG de los puntos P ubicados en un mismo plano de manera que la diferencia de distancias de A a P y de P a B sea menor de $0{,}05cm$.

Problema 8: solución

- Construir el segmento AB.

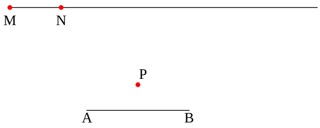

Figura: Segmento AB

Problema 8: solución

- Construir el segmento AB.
- Elegir un punto P que no pertenezca al segmento AB.

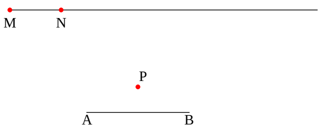

Figura: Segmento AB

Problema 8: solución

- Construir el segmento AB.
- Elegir un punto P que no pertenezca al segmento AB.
- Elegir un punto M y construir una semirrecta con origen M.

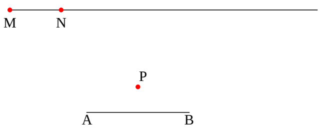

Figura: Segmento AB

Problema 8: solución

- Construir el segmento AB.
- Elegir un punto P que no pertenezca al segmento AB.
- Elegir un punto M y construir una semirrecta con origen M.
- Calcular $|d(A, P) - d(P, B)|$ y transferir dicho valor a la semirrecta. Llamar N al punto.

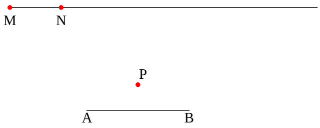

Figura: Segmento AB

Problema 8: solución

- Ubicar el punto medio de PN. Llamarle R.

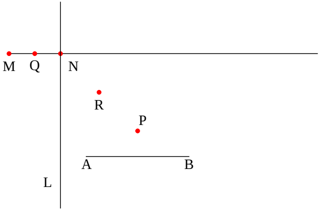

Figura: semirrecta y perpendicular

Problema 8: solución

- Ubicar el punto medio de PN. Llamarle R.
- Trazar por N la perpendicular a la semirrecta. Llamarla L.

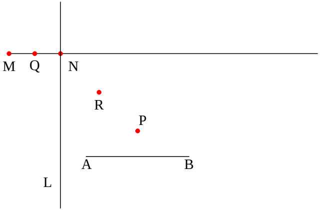

Figura: semirrecta y perpendicular

Problema 8: solución

- Ubicar el punto medio de PN. Llamarle R.
- Trazar por N la perpendicular a la semirrecta. Llamarla L.
- Transferir 0,05 a la semirrecta. Llamar Q al punto.

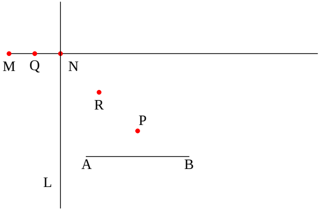

Figura: semirrecta y perpendicular

Problema 8: solución

- Ubicar el punto medio de PN. Llamarle R.
- Trazar por N la perpendicular a la semirrecta. Llamarla L.
- Transferir 0,05 a la semirrecta. Llamar Q al punto.
- Construir el segmento MQ.

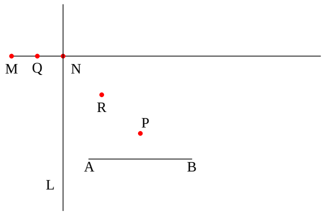

Figura: semirrecta y perpendicular

Problema 8: solución

- Ubicar el punto medio de PN. Llamarle R.
- Trazar por N la perpendicular a la semirrecta. Llamarla L.
- Transferir 0,05 a la semirrecta. Llamar Q al punto.
- Construir el segmento MQ.
- Ubicar el punto de intersección de L con el segmento MQ.

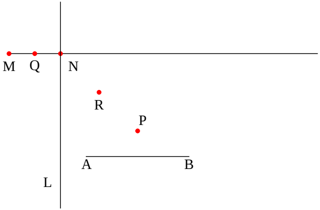

Figura: semirrecta y perpendicular

Problema 8: solución

- Ubicar el simétrico de dicho punto respecto a R.

Problema 8: solución

- Ubicar el simétrico de dicho punto respecto a R.
- Activar la traza en el último punto marcado.

Problema 8: solución

- Ubicar el simétrico de dicho punto respecto a R.
- Activar la traza en el último punto marcado.
- Arrastrar el punto M.

Problema 9

Construir un paralelepípedo con un vértice en el origen de coordenadas, tres de sus caras en los planos coordenados y el vértice diagonalmente opuesto al origen en el plano $x + y + z = 3$. Hallar la longitud de las aristas para que el paralelepípedo tenga volumen máximo.

Problema 9: solución

- Construir el triángulo con vértices en $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$ y $C(0,0,3)$.

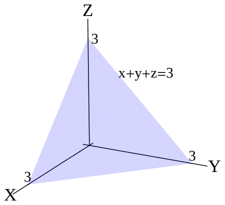

Figura: Plano $x+y+z=3$

Problema 9: solución

- Construir el triángulo con vértices en $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$ y $C(0,0,3)$.
- Elegir un punto P de la región tringular ABC.

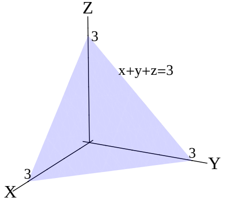

Figura: Plano $x+y+z=3$

Problema 9: solución

- Construir el triángulo con vértices en $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$ y $C(0,0,3)$.
- Elegir un punto P de la región tringular ABC.
- Usando el origen de coordenadas y el punto P como extremos de la diagonal principal construir el paralelepípedo de acuerdo a las condiciones del problema.

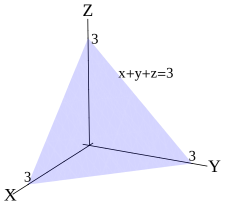

Figura: Plano $x + y + z = 3$

Problema 9: solución

- Calcular el volumen del paralelepípedo.

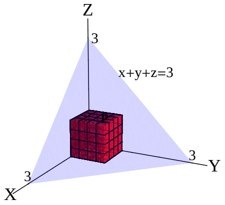

Figura: Máximo volumen de un paralelepípedo

Problema 9: solución

- Calcular el volumen del paralelepípedo.
- Mover el punto P en la región triangular para averiguar el valor máximo del volumen.

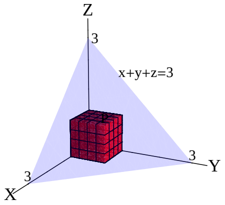

Figura: Máximo volumen de un paralelepípedo

Problema 9: solución

Sea $V(x, y, z) = x\,y\,z$ el volumen del paralelepípedo. El problema consiste en optimizar la función $V(x, y, z)$ bajo las restricciones $x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ x + y + z = 3$

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= x\,y\,z \\ &\leq \left(\tfrac{x+y+z}{3}\right)^3 \\ &= \left(\tfrac{3}{3}\right)^3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

El máximo volumen es 1 y se alcanza cuando $x = y = z = 1$

Conclusiones

1. Podemos observar que los problemas que se resuelven recurriendo a la construcción de algún lugar geométrico permiten al estudiante indagar si el problema tiene solución y en caso la tenga, permite conjeturar si existe más de una solución.

Conclusiones

1. Podemos observar que los problemas que se resuelven recurriendo a la construcción de algún lugar geométrico permiten al estudiante indagar si el problema tiene solución y en caso la tenga, permite conjeturar si existe más de una solución.
2. Al hacer las construcciones para la solución de un determinado problema, permite al estudiante revisar propiedades y conceptos propios de la geometría, lo cual ayuda a la reafirmación de los mismos.

Referencias

- Bulajich R., Gómez J. A., Valdez R. *Inequalities*. Cuadernos de Olimpiadas Matemáticas. Instituto de Matemáticas. Universidad Nacional Autónoma de México. 2005.
- Kazarinoff Nicholas D. *Geometry Inequalities*. The L. W. Singer Company. Yale University. United States of America. 1961
- Polya G. *Cómo planterar y resolver problemas*. Editorial Trillas, Vigésimoprimera reimpresión. México. 1997.
- Cabri Géomètre II Plus. Manual de usuario. http://www.cabri.com/download-cabri-2-plus.html#manuals

Referencias

- Cabri 3D. Manual de usuario.
  http://www.cabri.com/download-cabri-3d.html#manuals
- González U., Mariano
  http://macareo.pucp.edu.pe/∼mgonzal/index.htm

Muchas gracias