



XXIV Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana

Ica, Perú – 2006

**Solución de problemas de optimización
usando Geometría Dinámica**

**Mariano González Ulloa
Pontificia Universidad Católica del Perú
mgonzal@pucp.edu.pe**

Introducción

- ✦ Los problemas de optimización son tan antiguos como el hombre.
- ✦ Se presentan en todos los ámbitos donde se tienen que tomar decisiones.
- ✦ En la enseñanza de la Matemática se usan para aplicar conceptos matemáticos: cálculo de máximos y mínimos de funciones.

Introducción

- ✦ Uso de las TICs permiten modificar el tratamiento de los problemas de optimización.
- ✦ Uso de software para desarrollar Geometría Dinámica: Cabri Géomètre.
- ✦ Convertir el salón de clase en un pequeño laboratorio: se “reconstruyen” las condiciones de los problemas planteados y se generan modelos geométricos.

Introducción

- ✦ La Geometría Dinámica permite obtener resultados de forma “experimental”.
- ✦ Estos resultados deben ser justificados mediante argumentos teóricos matemáticos.
- ✦ Al final de cada problema se da la justificación matemática de la solución, sin usar Cálculo Diferencial.

Objetivos

- ✦ Representar gráficamente algunos problemas de optimización.
- ✦ Resolver, “experimentalmente”, los problemas aprovechando las bondades dinámicas de Cabrí.
- ✦ Justificar dichas soluciones usando argumentos que no involucren al Cálculo Diferencial.
- ✦ Usar Cabrí para reforzar los conocimientos de los temas de Geometría en diversos niveles educativos.

Justificación

- ✦ Los problemas de optimización aparecen en todas las áreas donde se deben tomar decisiones.
- ✦ Muchas metodologías educativas recurren a representaciones gráficas para lograr sus objetivos.
- ✦ Nuestra formación está, en buena parte, ligada a lo gráfico.
- ✦ “Una imagen vale más que mil palabras”.
- ✦ “Una imagen vale más que mil palabras pero una buena animación vale mucho más”.

Justificación: uso de Cabri

- ✦ Visualizar situaciones en forma global configurando relaciones entre distintos elementos.
- ✦ Agilizar la gran cantidad de manipulaciones de objetos que realizadas manualmente harían perder el objetivo principal.
- ✦ Vincular relaciones existentes entre objetos geométricos con relaciones numéricas.
- ✦ Plantear conjeturas y verificarlas.
- ✦ Visualizar lugares geométricos que muchas veces no es fácil de observar por la complejidad del conjunto generado.
- ✦ Revisar paso a paso las construcciones.
- ✦ Corregir errores en “tiempo real”.
- ✦ Animar las configuraciones y observar los distintos cambios que se originan hasta llegar a la solución del problema.
- ✦ Construir animaciones para colocar en la Web en forma de applets.

Aspectos teóricos

Definición.- Sean a_1, a_2, \dots, a_n números reales positivos, la media aritmética de tales números es:

$$MA = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

y la media geométrica es:

$$MG = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Teorema.- Si a_1, a_2, \dots, a_n son números reales positivos entonces

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

La igualdad ocurre sí y sólo sí $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

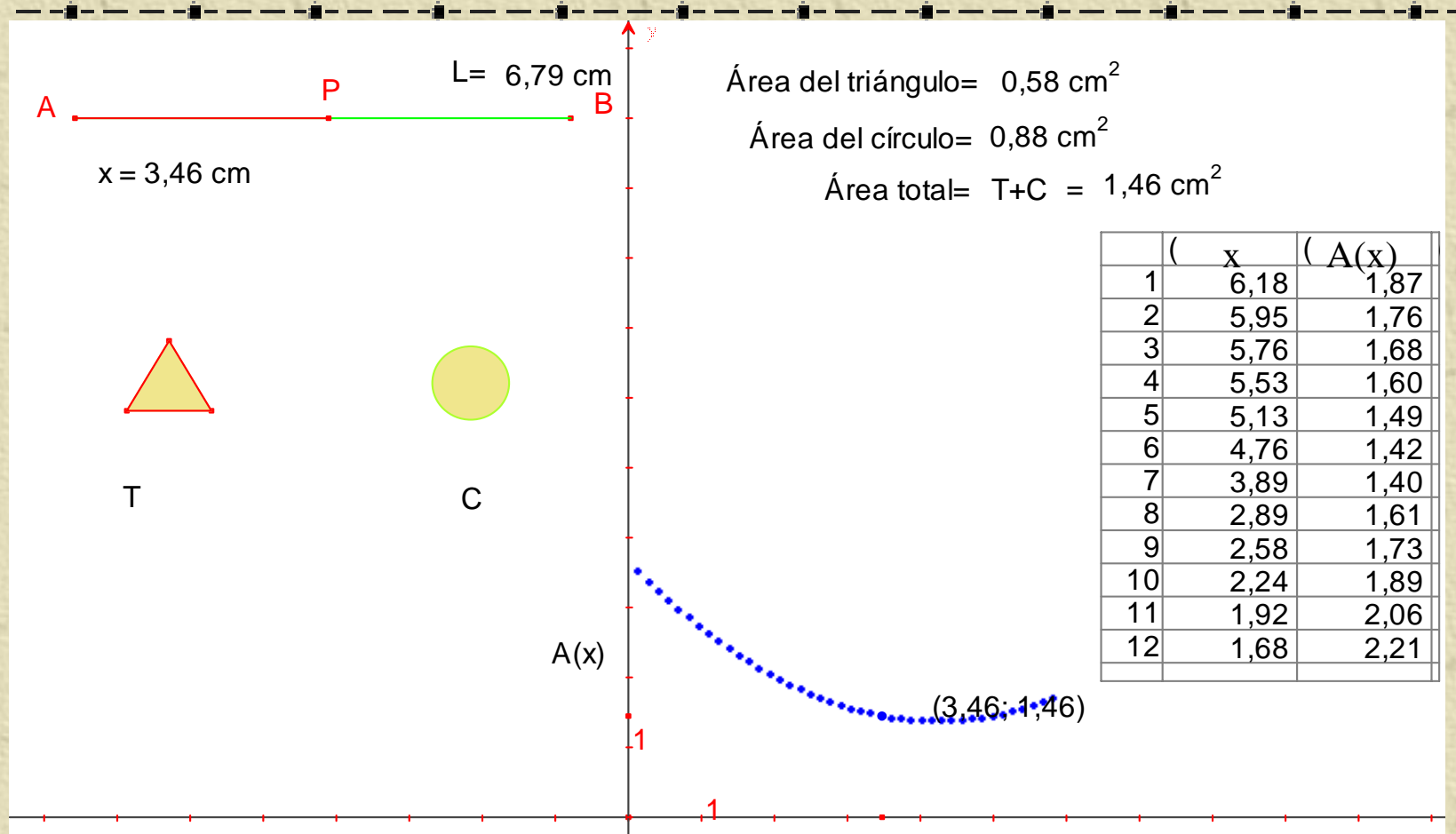
Procedimiento para la solución

- ✦ Construir la representación gráfica de los objetos que intervienen en el problema.
- ✦ Calcular el resultado del problema para valores particulares de las condiciones dadas.
- ✦ Generar el lugar geométrico, aprovechando el aspecto dinámico de Cabrí, para tener el valor óptimo.
- ✦ Justificar, rigurosamente, el valor óptimo hallado en la parte anterior.
- ✦ Contrastar los resultados obtenidos analíticamente con aquellos obtenidos usando Cabrí.

Problema No. 1

Dado un alambre de longitud L , dividirlo en dos partes, no necesariamente iguales. Construir con una de las partes un triángulo equilátero y con la otra una circunferencia. Hallar el perímetro del triángulo de manera que la suma de las áreas limitadas por ambas figuras sea la mayor posible.

Solución tradicional



Justificación

Longitud del alambre = L . Perímetro del triángulo = x .

Longitud de la circunferencia = $L - x$.

Área del triángulo $A_t(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2$. Área del círculo $A_c(x) = \frac{(L-x)^2}{4\pi}$

$$\begin{aligned} A(x) &= A_t(x) + A_c(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{(L-x)^2}{4\pi} \\ &= \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{12\sqrt{3}}\right)x^2 - \frac{L}{2\pi}x + \frac{L}{4\pi} \quad ; \text{ sea } a = \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{12\sqrt{3}} \\ &= a\left(x - \frac{L}{4\pi a}\right)^2 - \frac{L^2}{16\pi^2 a} + \frac{L^2}{4\pi} \\ &= a\left(x - \frac{L}{4\pi a}\right)^2 + \frac{L^2}{4\pi^2}\left(1 - \frac{1}{4\pi a}\right) \end{aligned}$$

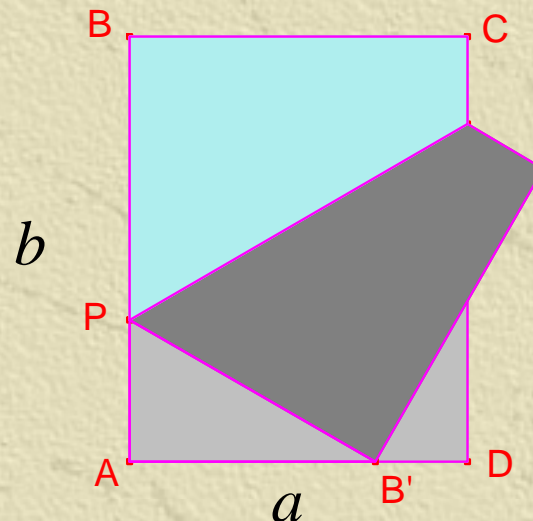
$$A(0) = \frac{L^2}{4\pi} \geq \frac{L^2}{12\sqrt{3}} = A(L)$$

Valor máximo de $A(x)$ es $\frac{L^2}{4\pi}$ cuando el perímetro del triángulo es 0.

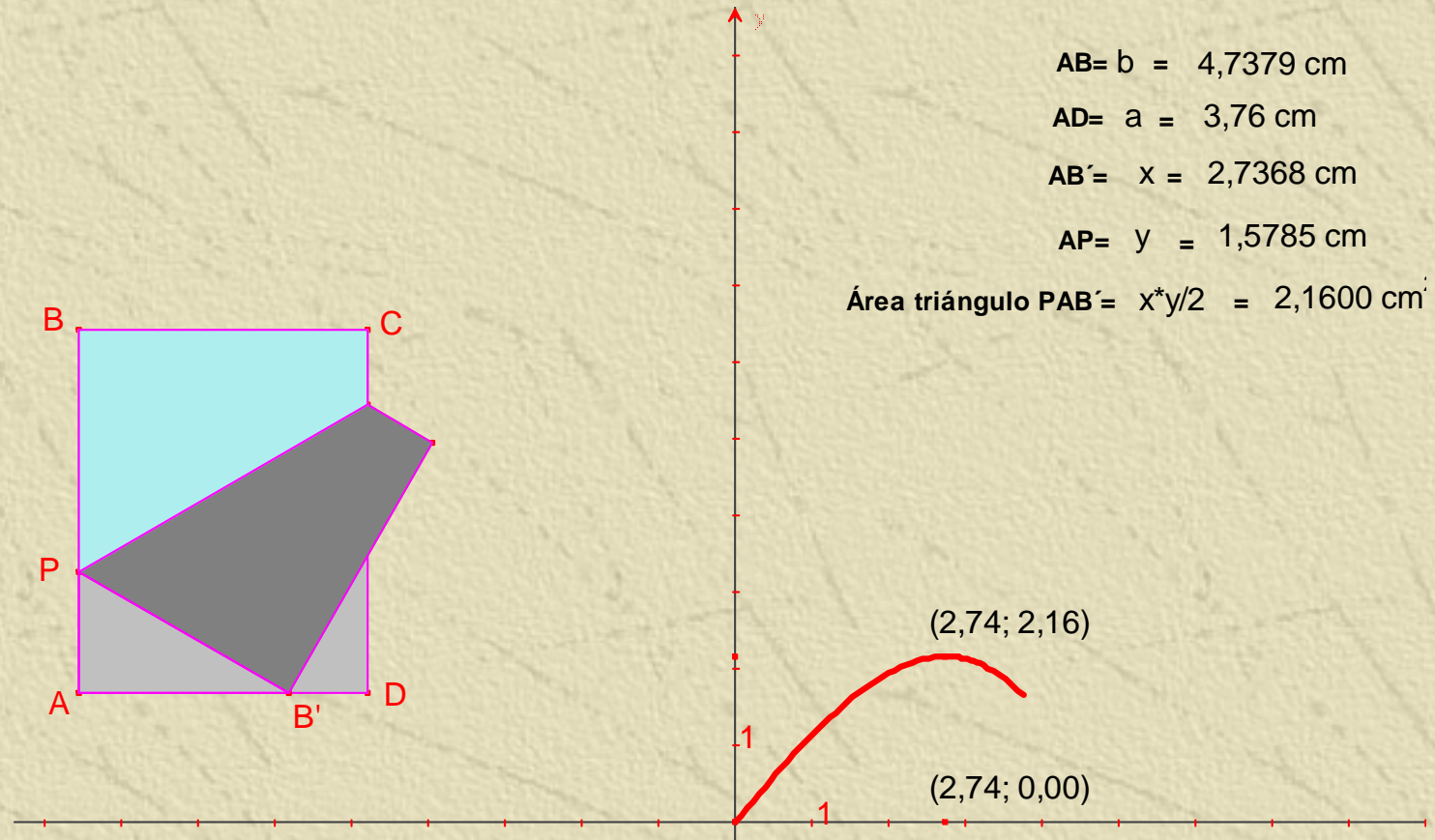
Verificar

Problema No. 2

Considerar una hoja de papel rectangular $ABCD$ de lados a y b , $0 < a < b$. Doblarla de manera que el vértice B “caiga” sobre el lado opuesto AD en el punto B' formando el triángulo rectángulo PAB' (P es el punto de doblez del lado AB). Hallar las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo PAB' para que su área sea máxima.



Solución tradicional



Cabri

Justificación

Sean a y b , $a < b$, los lados del rectángulo ABCD. x , y los catetos del triángulo rectángulo PAB' y $b - y$ su hipotenusa. Luego $x = \sqrt{b^2 - 2by}$. El área del triángulo es

$$A = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}y\sqrt{b^2 - 2by}$$

$$A^2 = \frac{1}{4}y^2(b^2 - 2by)$$

$$= \frac{b}{4}yy(b - 2y)$$

$$= \frac{b}{4} \left(\frac{y+y+b-2y}{3} \right)^3 \quad ; \quad y = b - 2y$$

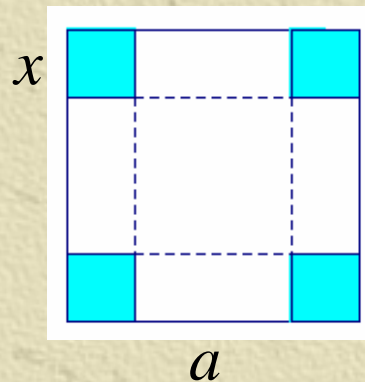
$$= \frac{b^4}{4 \times 27}$$

Luego $A \leq \frac{b^2}{6\sqrt{3}}$

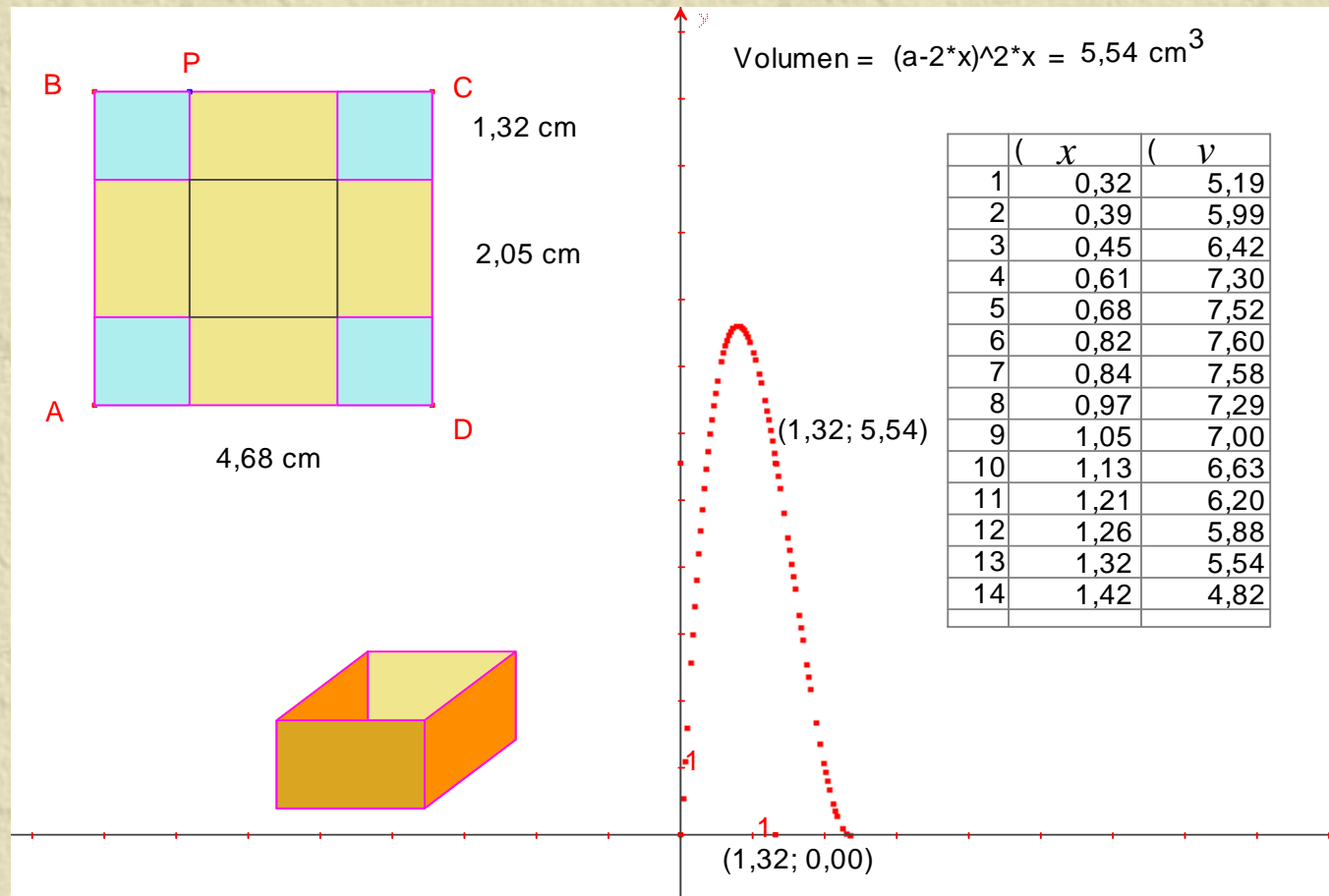
El área máxima es $\frac{b^2}{6\sqrt{3}}$ y se alcanza cuando $y = \frac{b}{3}$; $x = \frac{b}{\sqrt{3}}$

Problema No. 3

En cada esquina de una lámina cuadrada de lado a se recorta un cuadrado de lado x . Plegando según las líneas punteadas se obtiene una caja sin tapa. ¿Para qué valor de x el volumen de la caja es máximo?



Solución tradicional



Cabri

Justificación

Sea x el lado del pequeño cuadrado que se corta en cada esquina del cuadrado ABCD. El volumen de la caja es $V(x) = (a - 2x)(a - 2x)x$.

Luego

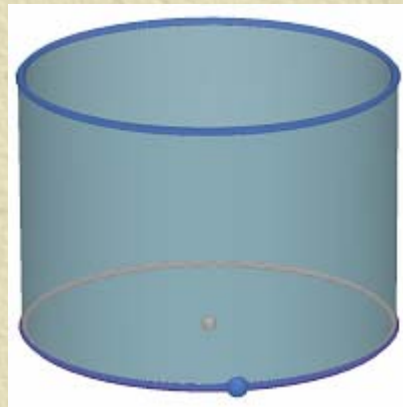
$$\begin{aligned} V(x) &= (a - 2x)(a - 2x)x \\ &= 2\left(\frac{a}{2} - x\right)\left(\frac{a}{2} - x\right)2x \\ &\leq 2\left(\frac{\frac{a}{2} - x + \frac{a}{2} - x + 2x}{3}\right)^3 \\ &= \frac{2}{27}a^3 \end{aligned}$$

El máximo volumen es $\frac{2a^3}{27}$ y se alcanza cuando $x = \frac{a}{6}$.

Verificar

Problema No. 4

Se desea construir un envase de forma cilíndrica de 1 unidad de volumen. Hallar las dimensiones del envase de manera que se utilice la menor cantidad posible de material en su construcción



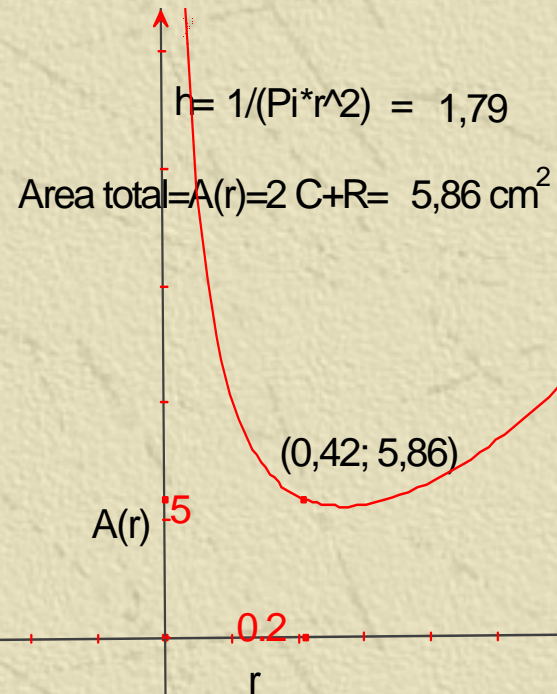
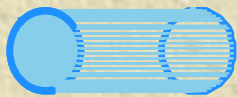
Solución tradicional



C



R



	(r	(A(r)
1	0,89	7,27
2	0,82	6,63
3	0,79	6,45
4	0,71	5,99
5	0,58	5,56
6	0,50	5,57
7	0,45	5,73
8	0,39	6,05
9	0,37	6,28
10	0,32	6,96
11	0,26	8,03
12	0,24	8,80

Cabri

Cabri3D

Justificación

Se requieren tres piezas:

dos círculos de radio r para las tapas y

un rectángulo de base $2\pi r$ y altura h para la cara lateral.

El volumen es $V = \pi r^2 h$ y debe ser igual a 1 entonces $h = \frac{1}{\pi r^2}$.

Se desea minimizar el área total del envase: $A = A_c + A_l = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

Luego

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} \\ &= 2\pi r^2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{2\pi r^2}{r^2}} \\ &= 3\sqrt[3]{2\pi} \end{aligned}$$

El área mínima es $3\sqrt[3]{2\pi}$ y se alcanza cuando $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ de donde resulta que $h = 2r$.

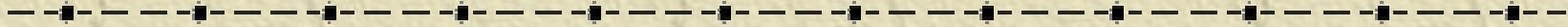
Verificar

Conclusiones

El procedimiento:

- ✦ Muestra que muchos de los problemas que se resuelven mediante Cálculo Diferencial pueden usarse para introducir conceptos nuevos en el nivel secundario.
- ✦ Permite mostrar algunas aplicaciones de la media aritmética y media geométrica de números reales positivos.
- ✦ A través de las construcciones con Cabrí, permite al alumno desarrollar sus habilidades y reforzar sus conocimientos de geometría.
- ✦ Permite relacionar varios aspectos de la matemática: geométrico, algebraico, lógico, etc.
- ✦ Muestra que los resultados obtenidos en forma “experimental” quedan verificados completamente con los argumentos teóricos matemáticos.

FIN



Muchas Gracias